極座標変換と surface measure

$\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して $J(\xi) = \displaystyle\int_{S^{n-1}} e^{ix\cdot\xi}\,d\sigma(x)$ を考える．このとき，J は以下の性質をみたす．ただし，S^{n-1} は n 次元単位球面とし，σ は S^{n-1} 上で定義された surface measure とする．

（1）J は動径関数である．

（2）Fourier 変換は動径関数を動径関数に写すことを認める．つまり，$F(x) = f(|x|)$ に対して $\hat{F}(\xi) = g(|\xi|)$ となる g が存在する．ただし，$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ の Fourier 変換 $\hat{f}$ は

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\,dx$$

で定義される．このとき g は f を用いて表すと

$$g(\rho) = \int_0^\infty j(2\pi r\rho)f(r)r^{n-1}\,dr$$

となる．

（3）J は $\Delta J + J = 0$ をみたす．

（4）j は $\rho j''(\rho) + (n-1)j'(\rho) + \rho j(\rho) = 0$ をみたす．

（5）$n = 3$ のとき $j(\rho) = \dfrac{4\pi\sin\rho}{\rho}$ となる．

$\boxed{\text{解答}}$

（1）任意の $R \in SO(n)$ に対して $J(R\xi) = J(\xi)$ を示す．

$$\begin{aligned} J(R\xi) &= \int_{S^{n-1}} e^{ix\cdot(R\xi)}\,d\sigma(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} e^{i({}^tRx)\cdot\xi}\,d\sigma(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} e^{i(R^{-1}x)\cdot\xi}\,d\sigma(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} e^{iy\cdot\xi}\,d\sigma(y)\ (\because x = Ry) \\ &= J(\xi) \end{aligned}$$

よって，J は動径関数であることが示された．

（2）$F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とし，$F(x) = f(|x|)$ なる f が存在するとする．このとき $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とな

る. Fubini-Tonelli の定理より

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
g(|\xi|) &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty F(r\omega) e^{-2\pi i r\omega\cdot\xi} r^{n-1}\, dr\, d\sigma(\omega) \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(r) r^{n-1} e^{i\omega\cdot(-2\pi r\xi)}\, dr\, d\sigma(\omega) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} e^{i\omega\cdot(-2\pi r\xi)}\, d\omega \right) f(r) r^{n-1}\, dr \\
&= \int_0^\infty J(-2\pi r\xi) f(r) r^{n-1}\, dr \\
&= \int_0^\infty j(2\pi r|\xi|) f(r) r^{n-1}\, dr
\end{aligned}$$

となる. 後は, $\rho = |\xi|$ とすればよい.

(3) $e^{ix\cdot\xi}$, $ix_k e^{ix\cdot\xi}$, $-{x_k}^2 e^{ix\cdot\xi}$ は ξ について S^{n-1} 上有界であるから

$$\Delta J + J = \int_{S^{n-1}} (\Delta(e^{ix\cdot\xi}) + e^{ix\cdot\xi})\, dx = \int_{S^{n-1}} (-\|x\|^2 + 1) e^{ix\cdot\xi}\, dx = 0$$

となる.

(4) (3) より $\Delta J + J = 0$ である. ここで $\xi = \rho\omega$, $\rho \in (0, \infty)$, $\omega \in S^{n-1}$ とすると

$$\Delta J + J = \frac{\partial^2 J}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial J}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{S^{n-1}} J + J = 0$$

となる. ここで, $J(\rho\omega) = j(\rho)$ であり, $\Delta_{S^{n-1}} j = 0$ なので両辺 ρ をかけると示される.

(5) $n = 3$ のとき, $f(\rho) = \rho j(\rho)$ とすると, (4) の微分方程式は $f''(\rho) + f(\rho) = 0$ となる. よって f はある定数 α, β を用いて $f(\rho) = \alpha \cos\rho + \beta \sin\rho$ と表される. ここで $f(\rho) = \rho j(\rho)$ より $f(0) = 0$ であり, $f'(\rho) = j(\rho) + \rho j'(\rho)$ より $f'(0) = j(0) = \int_{S^2} d\sigma(x) = 4\pi$ となる. ゆえに $\alpha = 0$, $\beta = 4\pi$ となり $j(\rho) = \dfrac{4\pi \sin\rho}{\rho}$ となる.